Loeng 1

Liikumisvõrrandid

1.1 Üldistatud koordinaadid

Definitsioon 1. Mehaanikas *masspunktiks* nimetatakse keha, mille liikumise kirjeldus ei sõltu selle mõõtmetest.

Selle definitsiooni järgi masspunkti mõõtmed võivad olla lõplikud. Näiteks planeedid on masspunktid kui vaadelda nende tiirlemist ümber Päikese ja kui mitte arvestada nende pöörlemist ümber oma telgede.

- Masspunkti *asukoht* ruumis on määratud selle raadiusvektoriga $\boldsymbol{r}$, mille komponendid (x, y, z) on Descartes'i koordinaadid.
- Masspunkti *kiiruseks* nimetatakse suurust $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$.
- Masspunkti *kiirenduseks* nimetatakse suurust $\boldsymbol{v} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}$.

N masspunktiga süsteemi asukoht ruumis (ehk selle mehaaniline olek) on määratud N raadiusvektoriga ehk $3N$ koordinaadiga. Masspunktide asukohad aga võivad olla seotud teatud tingimustega ja seega N masspunkti asukoht ruumis võib olla määratud ka vähema hulga parameetritega kui $3N$ koordinaadiga.

Definitsioon 2. Süsteemi *vabadusastmeks* nimetatakse sõltumatute parameetrite arvu, mis määrab üheselt ära süsteemi asukoha.

Sellised sõltumatud parameetrid ei pruugi üldse olla Descartesi koordinaadid; sõltuvalt ülesande püstitusest võib sellisteks parameetriteks olla mingid teised koordinaadid, mis lihtsustavad ülesande kirjeldust.

Definitsioon 3. Süsteemi, mille vabadustaste on s, *üldistatud koordinaatiteks* nimetatakse suvalist s suurust $q_1, q_2, \ldots, q_s \equiv q$, mis täielikult määravad ära süsteemi asukoha. Suurusi $\dot{q}_i \equiv \dot{q}$ nimetatakse *üldistatud kiirusteks.*

Ainult sellest, et mehaanilise süsteemi üldistatud koordinaadid on antud mingil ajahetkel, ei piisa, et määrata süsteemi olekut lõpmatult väikese ajavahemiku dt pärast, sest seda olekut mõjutab ka süsteemi üldistatud kiirused antud ajahektel. Kui samaaegselt on antud süsteemi kõik üldistatud koordinaadid ja kiirused, siis on süsteemi olek üheselt määratud [1] ja põhimõtteliselt on võimalik välja arvutada süsteemi edasine liikumine. Seoseid kiirenduste, kiiruste ja koordinaatide vahel nimetatakse *liikumisvõrranditeks*. Liikumisvõrrandid on 2-st järku diferentsiaalvõrranid funktsioonide $q(t)$ suhtes ja nende integreerimine põhimõtteliselt võimaldab määrata need funktsioonid ehk süsteemi tee.

1.2 Vähima mõju printsiip

Kõige üldisemalt mehaanilise süsteemi liikumist määravaks seaduseks on *vähima mõju printsiip* ehk *Hamiltoni printsiip*:

Aksioom 1.2.1 (Vähima mõju printsiip). *Iga mehaaniline süsteem on kirjeldatud määratud funktsiooniga*

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t) \equiv L(q, \dot{q}, t)$$

ja süsteemi liikumine kahe ajahetke t_1 ja t_2 vahel, mil süsteemi koordinaadid on vastavalt $q^{(1)}$ ja $q^{(2)}$, on määratud tingimusega, et integraal

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{1.1}$$

omandab vähima väärtuse.

Funktsiooni L nimetatakse *Lagrange'i funktsiooniks* ja integraali (1.1) nimetatakse *mõju funktsiooniks.*

See, et Lagrange'i funktsioon ei sisalda kõrgemaid ajatuletisi $\ddot{q}, \ldots$ väljendab seda, et süsteemi mehaaniline olek antud ajahetkel on täielikult määratud selle koordinaatide ja kiirustega.

Teoreem 1.2.2 (Lagrange'i võrrand). *Ühe vabadusastmega süsteemi korral integraal (1.1) omandab minimaalse väärtuse kui funktsioon $q = q(t)$ rahuldab võrrandit*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1.2}$$

Tõestus. Oletame, et q on selline funktsioon, mille korral integraal S on minimaalne. Siis integraal S peab kasvama kui asendada $q(t)$ funktsiooniga $q(t) + \delta q(t)$, kus $\delta q(t)$ on $q(t)$ *variatsioon*, mis eeldatavalt on väike ajavahemikus $[t_1, t_2]$ ja peavad kehtima tingimused $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

[1] Landau ütleb, et see järeldub kogemusest. Aga millisest? Ehk kas sellest, et kui on antud q ja $\dot{q}$, piisab, et määrata $\ddot{q}$? Tõesta!

Funktsionaali S muutus sellisel asendusel peale integrandi ritta arendust $\delta q(t)$ ja $\delta \dot{q}(t)$ järgi esimest järku liikmetega on

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \equiv \delta S. \quad (1.3)$$

Vähima mõju printsiipi väljendab nüüd tingimus $\delta S = 0$. Kuna $\delta \dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$, siis peale ositi integreerimist

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \bigg|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Viimane liige on aga null kuna q variatsioon vaadeldava ajavahemiku rajapunktides on null. Kuna järele jäänud integraal peab null olema kõikvõimalike variatsioonide δq korral, siis peab selle integrant samaselt null olema. $\square$

Teoreem 1.2.3 (Lagrange'i võrrandid). *s vabadusastmega süsteemi korral integraal (1.1) omandab minimaalse väärtuse kui funktsioonid $q = q_i(t)$ rahuldavad võrrandite süsteemi*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \quad (1.4)$$

Võrrandeid (1.4) nimetatakse *Lagrange'i võrranditeks*. Niisiis, kui on teada mehaanilise süsteemi Lagrange'i funktsioon, siis võrrandid (1.4) määravad ära seosed kiirenduste, kiiruste ja koordinaatide vahel, ehk Lagrange'i võrrandid on süsteemi liikumisvõrrandid. Need võrrandid on teist järku diferentsiaalvõrrandid, mille üldlahend sisaldab $2s$ suvalist konstanti. Nende konstantide määramiseks, ehk süsteemi liikumise üheseks määramiseks, on vaja teada *algtingimusi*, mis määravad süsteemi oleku mingi ajahetke jaoks. Nendeks algtingimusteks võivad olla näiteks kõikide koordinaatide ja kiiruste algsed väärtused.

Lause 1.2.4 (Lagrange'i funktsiooni aditiivsus). *Koosnegu mehaaniline süsteem kahest osast, A ja B. Kui need osad eraldi võetuna on kinnised süsteemid, siis olgu nende Lagrange'i funktsioonid vastavalt L_A ja L_B. Piirjuhul, kui süsteemi osad kaugenevad nii kaugele, et nende vastasmõju saab hüljata, siis kogu süsteemi Lagrange'i funktsioon läheneb piirväärtusele*

$$\lim L = L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B}. \quad (1.5)$$

Lause 1.2.5 (Lagrange'i funktsiooni homogeensus). *Mehaanilise süsteemi Lagrange'i funktsiooni korrutamisel suvalise konstandiga ei muuda liikumisvõrrandeid — liikumisvõrrandid on invariantsed Lagrange'i funktsiooni ühikute teisenduse suhtes.*

Lause 1.2.6 (Lagrange'i funktsiooni määramise täpsus). *Liikumisvõrrandid on invariantsed Lagrange'i funktsioonile suuruse*

$$\frac{d}{dt} f(q, t)$$

liitmise suhtes, kus $f(q, t)$ on suvaline koordinaadi ja aja funktsioon.

Tõestus. Vaatleme Lagrange'i funktsioone $L(q, \dot{q}, t)$ ja $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$ ja leiame mõjuintegraali

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1).$$

Kuna viimaste liikmete variatsioonid on alati nullid, siis $\delta S' = 0$ ja $\delta S = 0$ on samaväärsed ning saadavad liikumisvõrrandid on samad. □

1.3 Galileo relatiivsusprintsiip

Igasuguse mehaanilise nähtuse vaatlemiseks on vaja valida *taustsüsteem*. Üldiselt on liikumisvõrrandite kujud erinevad erinevates taustsüsteemides ja võib juhtuda, et suvalise taustsüsteemi valikul väga lihtsat mehaanilist nähtust kirjeldavad liikumisvõrrandid on väga keerulised. Seega oleks alati otstarbekas valida selline taustsüsteem, mille suhtes mehaanika seadused omandavad lihtsaima kuju.

Definitsioon 4. *Intertsiaalseks* taustsüsteemiks nimetatakse sellist taustsüsteemi, mille suhtes ruum on homogeenne ja isotroopne ning aeg on homogeenne.

Ilmselt on vaba keha probleemi korral otstarbekas valida just inertsiaalne taustsüsteem, sest siis mingil ajahetkel liikumatu vaba keha püsib liikumatuna ka järgmistel ajahetkedel. Inertsiaalse taustsüsteemi ruumi ja aja homogeensusest järeldub, et vabakeha Lagrange'i funktsioon ei saa ilmutatult sõltuda ei ruumi ega aja koordinaatidest: $L = L(\boldsymbol{v})$. Kuna ruum on ka isotroopne, siis Lagrange'i funktsioon ei sõltu ka kiiruse suunast vaid ainult selle suurusest: $L = L(v^2)$. Seega vaba keha Lagrange'i võrrand omandab kuju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = 0, \tag{1.6}$$

millest järeldub, et $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ on konstant. Ja kuna $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ sõltub ainult kiirusest, siis saame, et inertsiaalses taustsüsteemis vaba keha kiirus

$$\boldsymbol{v} = \text{Const.} \tag{1.7}$$

Seda nimetatakse *inertsiseaduseks* ehk *Newtoni I seaduseks.*

Kui vaadelda taustsüsteemi, mis liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt inertsiaalse taustsüsteemi suhtes, siis vaba liikumise võrrand on sama, mis inertsiaalses taustsüsteemis: vaba liikumine toimub konstantse kiirusega. Mehaanilises mõttes on need taustsüsteemid equivalentsed, sest nii ruumi kui aja omadused on samad, samuti on mehaanika seadused samad. Seega inertsiaalseid taustsüsteeme on lõpmatult palju, üksteise suhtes liiguvad nad ühtlaselt ja sirgjooneliselt. See ongi *Galileo relatiivsusprintsiip.*

Kui vaadelda ühe punkti koordinaate erinevates taustsüsteemides K ja K', millest viimane liigub esimese suhtes kiirusega $\boldsymbol{V}$, siis punkti kohavektorid on seotud järgmiselt

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V} t, \tag{1.8}$$

mille juures on eeldatud, et aeg on mõlemas taustsüsteemis sama:

$$t = t'. \tag{1.9}$$

(Klassikalises mehaanikas on aja absoluutsus üheks põhieelduseks.)

Võrrandeid (1.8) ja (1.9) nimetatakse *Galileo teisendusteks* ja Galileo relatiivsusprintsiip ütleb, et mehaanika liikumisvõrrandid on invariantsed Galileo teisenduste suhtes.

1.4 Vaba masspunkti Lagrange'i funktsioon

Eelnevas leiti, et vaba masspunkti korral $L = L(v^2)$. Kasutades Galileo relatiivsusprintsiipi, saab vaba masspunkti Lagrange'i funktsiooni kuju veel täpsustada. Niisiis, vaatleme vaba masspunkti inertsiaalses taustsüsteemis K ja üht teist inertsiaalset taustsüsteemi K', mis liigub lõpmatult väikese kiirusega $\boldsymbol{\epsilon}$ esimese suhtes. Siis vaba masspunkti kiirus taustsüsteemis K' on $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$. Galileo relatiivsusprintsiibi järgi Lagrange'i funktsioonid erinevates taustsüsteemides peavad olema sama kujuga: Lagrange'i funktsioon $L'(v'^2)$ taustsüsteemis K' võib erineda Lagrange'i funktsioonist $L(v^2)$ taustsüsteemis K ainult liidetava võrra, mis on aja täistuletis mingist koordinaatide ja aja funktsioonist (vt Lauset 1.2.6): $L'(v'^2) \sim L(v'^2)$. Leiame

$$L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2) \approx L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon},$$

kus viimene liige on täistuletis parajasti siis kui $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ on konstantne funktsioon. Seega võime vabamasspunkti Lagrange'i funktsiooni esitada kujul

$$L = \frac{1}{2} m v^2. \tag{1.10}$$

Sama tulemus kehtib ka taustsüsteemide lõpliku suhtelise kiiruse $\boldsymbol{V}$ korral:

$$L' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{2} m V^2 = L + \frac{d(m\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{2} m V^2 t)}{dt},$$

kus viimane liige on täistuletis, mille võib ära jätta.

Suurust m nimetatakse vabalt liikuva masspunkti *massiks*. Vabalt liikuva masspunkti mass ei saa olla negatiivne, vastasel juhul ei eksisteeriks selle mõjuintegraalil miinimumi.

Vabade mitteinterakteeruvate masspunktide süsteemi Lagrange'i funktsioon on

$$L = \sum \frac{1}{2} m_a v_a^2. \tag{1.11}$$

Siin indekseid $a, b, \ldots$ kasutatakse masspunktide indekseerimiseks, indekseid $i, j, \ldots$ kasutatakse üldistatud koordinaatide komponentide indekseerimiseks.

Märkus 1. Pane tähele, et

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{(dl)^2}{(dt)^2}.$$

Seega, et leida vaba masspunkti Lagrange'i funktsioon mingis koordinaatide süsteemis, piisab, kui teada joone elemendi pikkuse ruutu. Näiteks Descartes'i koordinaatides $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ja $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, silindrilistes koordinaatides $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ ja $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$, sfäärilistes koordinaatides $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ ja $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$.

1.5 Masspunktide süsteemi Lagrange'i funktsioon

Vaatleme nüüd kinnist süsteemi, mis koosneb omavahel vastasmõjus olevatest masspunktidest. Osutub, et masspunktide vaheline vastasmõju saab kirjeldada lisa liidetavaga mitteinterakteeruvate masspunktidega süsteemi Lagrange'i funktsioonis (1.11): [2]

$$L = \sum \frac{1}{2} m_a v_a^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots), \tag{1.12}$$

kus funktsioon $-U$ sõltub vastasmõju iseloomust ja masspunktide kohavektoritest. Summat $T = \sum \frac{1}{2} m_a v_a^2$ nimetatakse süsteemi *kineetiliseks energiaks* ja funktsiooni U süsteemi *potensiaalseks energiaks.*

See, et potensiaalne energia sõltub ainult masspunktide asukohtadest mingil ajahetkel, näitab, et suvalise masspunkti asukoha muutus momentaalselt mõjutab teisi masspunkte — klassikalises mehaanikas vastasmõju levib lõpmatult kiiresti ja see tuleneb aja absoluutsusest ja Galileo relatiivsusprintsiibist. Tõepoolest, kui vastasmõju levi kiirus oleks lõplik, siis aja absoluutsusest (kiiruste liitmise reegel kehtib kõigi nähtuste jaoks) järeldub, et see oleks erinev erinevates taustsüsteemides, mida vaadeldakse masspunktide suhtelise liikumise suhtes. Ehk vastasmõjuvate masspunktide liikumisvõrrandid oleksid erinevad erinevates taustsüsteemides, mis on vastuolus relatiivsusprintsiibiga.

Lagrange funktsiooni (1.12) kujust järeldub, et aeg on ka isotroopne (asendus $t \to -t$ ei muuda Lagrange funktsiooni kuju). Sellest järeldub, et kui süsteemil on võimalik mingi liikumine, siis on võimalik ka sellele vastassuunaline liikumine (see on liikumine, mille korral süsteem läbib samad olekud vastupidises järjekorras). Kõik klassikalise mehaanika liikumised on pööratavad.

Teades Lagrange'i funktsiooni kuju, on liikumisvõrrandid

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{1.13}$$

esitatavad *Newtoni II seaduse* kujul

$$m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}, \tag{1.14}$$

[2] Kas seda saab kuidagi ka tõestada?

mis on interakteeruvate masspunktidega süsteemi mehaanika põhivõrrand. Vektorit

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{1.15}$$

nimetatakse a-ndale masspunktile mõjuvaks *jõuks*. Nagu potensiaalne energiagi, sõltub jõud ainult masspunktide asukohtadest, millest omakorda masspunktide kiirendused sõltuvad ka ainult masspunktide asukohtadest.

Potensiaalne energia on määratud aditiivse konstandi täpsusega ja tavaliselt valitakse see konstant selliselt, et potensiaalne energia läheneks nullile kui masspunktide vahelised kaugused lähenevad lõpmatusele.

Et kirjeldada liikumist üldistatud koordinaatides, tuleb sisestada järgmine koordinaatide teisendus

$$x_a = f_a(q_1, \ldots, q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Lagrange funktsiooni $L = \frac{1}{2}\sum m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$ saades tulemuseks

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q), \tag{1.16}$$

kus a_{ik} on ainult koordinaatide funktsioonid. Seega kineetiline energia üldistatud koordinaatides on ikka ruutfunktsioon kiirustest, kuid võib sõltuda ka koordinaatidest.

Vaatleme nüüd lahtist süsteemi A, mis on vastasmõjus mingi teise süsteemiga B, mis liigub etteantud viisil. Sellisel juhul öeldakse, et süsteem liigub välises väljas (mis on tekitatud süsteemi B poolt). Et leida sellise süsteemi liikumisvõrrandeid, vaadeldakse kogu süsteemi A+B Lagrange'i funktsiooni L ning L_A saadakse asendades etteantud koordinaadid q_B Lagrange'i funktsiooni L. Niisiis, eeldades, et süsteem A+B on kinnine, siis $L = T_\mathrm{A}(q_\mathrm{A}, \dot{q}_\mathrm{A}, t) + T_\mathrm{B}(q_\mathrm{B}, \dot{q}_\mathrm{B}, t) - U(q_\mathrm{A}, q_\mathrm{B})$, kus kaks esimest liiget on süsteemide A ja B kineetilised energiad ning kolmas liige on nende vastasmõju potensiaalne energia. Etteantud koordinaatide q_B asendusel võib loobuda teisest liikmest kuna $T(q_\mathrm{B}(t), \dot{q}_\mathrm{B}(t))$ sõltub ainult ajast ning on seega esitatav täistuletisena mingist aja funktsioonist. Kokkuvõttes, välises väljas liikuva süsteemi Lagrange'i funktsiooni $L_\mathrm{A} = T_\mathrm{A}(q_\mathrm{A}, \dot{q}_\mathrm{A}, t) - U(q_\mathrm{A}, q_\mathrm{B}(t))$ potensiaalse energia liige võib sõltuda ka ajast.

Näiteks Lagrange'i funktsioon üksik masspunkti jaoks, mis liigub välises väljas, on

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.17}$$

ja vastav liikumisvõrrand on

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{1.18}$$

Sellist välist välja, kus masspunktile mõjub igas välja punktis sama jõud $\boldsymbol{F}$, nimetatakse *ühtlaseks* väljaks. Ühtlase välja korral potensiaalne energia on

$$U = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}. \tag{1.19}$$

Märkus 2. Tihti mehaanika süsteemides vastasmõju erinevate masspunktide vahel on *kitsenduste* (sidemete) kujul, s.t. on mingid piirangud masspunktide vahelise kauguse vahel. Sellisteks kitsendusteks võivad olla näiteks vardad, vedrud, liigendid jne, mis omakorda toovad sisse hõõrde mõjude arvestamise, mis viib meid välja puhta mehaanika raamest. Praktikas aga tihti on hõõrde mõjud nii väikesed, et neid saab hüljata. Samuti, kui hüljata kitsenduste massid kui väga väikesed, siis süsteemis olevate kitsendused lihtsalt vähendavad süsteemi vabadusastet. Ja süsteemi liikumise määramiseks saab jällegi kasutada Lagrange funktsiooni (1.16), kus üldistatud koordinaatide arv võrdub tegeliku vabadusastmega.