Loeng 2

Jäävusseadused

2.1 Liikumisintegraalid

Mehaanilise süsteemi ajas muutuvad olekud on määratud s funktsiooniga $q_i(t)$ ja $\dot{q}_i(t)$.

Definitsioon 5. Funktsioone, mis on konstantsed kogu mehaanilise süsteemi liikumise jooksul, nimetatakse *liikumisintegraalideks* ja need sõltuvad ainult algtingimustest.

Lause 2.1.1. *s vabadusastmega süsteemil on $2s-1$ sõltumatut liikumisintegraali.*

Tõestus. Kuna liikumisvõrrandid ei sõltu aja alguspunkti valikust, siis üks integreerimiskonstantidest on konstantne liidetav t_0 ajaparameetri argumendis. Peale t_0-i elimineerimist, saab liikumisvõrrandite üldlahendist

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t+t_0, C_1, \ldots, C_{2s-1}) \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(t+t_0, C_1, \ldots, C_{2s-1}) \end{aligned}$$

avaldada

$$C_j = C_j(q_1(t), \ldots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_s(t)),$$

mis ongi liikumisintegraalid. □

Osutub, et mehaanikas on osa liikumisintegraale erilised, kuna need tulenevad aja ja ruumi homogeensusest ja isotroopsusest ning on aditiivsed järgmises mõttes: süsteemi mingi liikumisintegraal on võrdne süsteemi mitteinerakteeruvate osade vastavate liikumisintegraalide summaga. Selliseid liikumisintegraale nimetatakse *jäävateks* suurusteks. Kasutades jäävaid suurusi on võimalik ennustada süsteemi käitumist peale selle osade vastasmõju kasutades informatsiooni enne osade interaktsiooni.

2.2 Energia

Järgnevas tuletama jäävusseaduse, mis on tingitud aja homogeensusest. Aja homogeensusest tingituna ei sõltu kinnise süsteemi Lagrange'i funktsioon ilmutatud kujul ajast, seega

Lagrange funktsiooni osatuletis ajaparameetri järgi peab olema null. Kasutades Lagrange võrrandeid (1.4), leiame

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i == \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

millest avaldub

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0.$$

Seega suurus

$$E \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{2.1}$$

on konstantne kogu suletud süsteemi liikumise jooksul ja on liikumisintegraal, mida nimetatakse *energiaks*. Energia aditiivsus tuleneb Lagrange funktsiooni aditiivsusest.

Osutub, et energia jäävus kehtib ka selliste lahtiste süsteemide korral, mis on ajast sõltumatus välises väljas, sest ka siis ei sõltu Lagrange funktsioon ajast ja ülaltoodud arutluskäik jääb kehtima. Jääva energiaga mehaanilisi süsteeme nimetatakse *konservatiivseteks* süsteemideks.

Kinnise süsteemi Lagrange funktsioon on esitatav kujul $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$, kus T on ruutfunktsioon kiiruste suhtes. Siit saab lihtsalt tuletada, et

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

Seega energia avaldub kineetilise ja potensiaalse energia summana:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \tag{2.2}$$

või Descartes'i koordinaatides:

$$E = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2 + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots). \tag{2.3}$$

2.3 Liikumishulk

Järgnevas tuletame jäävusseaduse, mis on tingitud ruumi homogeensusest. Ruumi homogeensusest tuleneb, et kinnise süsteemi mehaanilised omadused ei muutu kui kogu süsteemi nihutada ruumis paralleelselt ehk leiame tingimused, mil Lagrange'i funktsioon ei sõltu lõpmatult väikesest siirdest $\boldsymbol{\epsilon}$, mis on rakendatud kõigile süsteemi masspunktidele nii, et nende kiirused on fikseeritud. Siis

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a},$$

kus summeerimine toimub üle kõigi süsteemi masspunktide. Kuna $\boldsymbol{\epsilon}$ on suvaline siis tingimus $\delta L = 0$ on samaväärne tingimusega

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0. \tag{2.4}$$

Kasutades Lagrange'i võrrandeid (1.13), saame

$$\sum a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0.$$

Seega kinnises mehaanilises süsteemis vektor

$$\boldsymbol{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \sum m_a \boldsymbol{v}_a \tag{2.5}$$

on konstantne kogu liikumise vältel. Vektorit $\boldsymbol{P}$ nimetatakse süsteemi *liikumishulgaks* (või ka *impulsiks*). Liikumishulga vektor on ilmselt aditiivne liikumisintegraali vektor sõltumata sellest kas üksikud süsteemi masspunktid on vastasmõjus või mitte.

Liikumishulga vektori kõik kolm komponenti on jäävad ainult välise välja puudumise korral. Samas aga mõned komponendid võivad olla jäävad ka välise välja olemas olus, kui viimane ei sõltu mitte kõigist Descartesi koordinaatidest. Näiteks z-telje suunalise ühtlase välja korral liikumishulga x ja y komponentid on jäävad suurused.

Võrrandil (2.4) on lihtne füüsikaline tähendus. Nimelt selle summant on masspunktile a mõjuv jõud $\boldsymbol{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ ja seega see võrrand ütleb, et kinnise süsteemi kõigile masspunktidele mõjuvate jõudude summa on null:

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0. \tag{2.6}$$

Erijuhul, kui süsteem koosneb kahest masspunktist, siis $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$, ehk ühele osakesele mõjuv jõud on sama suur kui teisele osakesele mõjuv jõud kuid vastassuunaline. See on mõju ja vastasmõju seos ehk *Newtoni III seadus.*

Kui liikumine on kirjeldatud üldistatud koordinaatides, siis suurusi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.7}$$

nimetatakse *üldistatud liikumishulkadeks* ja suurusi

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.8}$$

nimetatakse *üldistatud jõududeks*. Lagrange'i võrrandid on siis kujul

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{2.9}$$

Descartesi koordinaatides üldistatud liikumishulgad on vektori $\boldsymbol{p}_a$ komponendid. Üldiselt p_i on aga lineaarsed homogeensed funktsioonid üldistatud kiirustest ja ei taandu masside ja kiiruste korrutisteks.

2.4 Massi kese

Vaatleme kinnise mehaanilise süsteemi liikumist erinevates inertssüsteemides K ja K', kus viimane liigub esimese suhtes kiirusega $\boldsymbol{V}$. Siis masspunktide kiirused erinevates taustsüsteemides on seotud võrranditega $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$ ja analoogiliselt liikumishulgad erinevates süsteemides on

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a v'_a + \boldsymbol{V} \sum_a m_a = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V} \sum_a m_a. \tag{2.10}$$

Alati eksisteerib selline taustsüsteem K', mille suhtes kogu liikumishulk on null. Selline taustsüsteem liigub kiirusega

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P} / \sum m_a = \frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a}. \tag{2.11}$$

Kui mehaanilise süsteemi kogu liikumishulk on null antud taustsüsteemis, siis öeldakse, et see süsteem *seisab* antud taustsüsteemis — see on seisva masspunkti mõiste üldistus süsteemile. Kiirus $\boldsymbol{V}$ iseloomustab liikuva mehaanilise süsteemi kui terviku liikumiskiirust. Seega liikumishulga jäävus annab võimaluse defineerida mehaanilise süsteemi kui terviku seismise ja liikumise mõisted.

Ülaltoodud võrrand näitab ka, et süsteemi liikumishulga ja kiiruse vahel on sama seos, mis masspunkti, massiga $\mu = \sum m_a$, liikumishulga ja kiiruse vahel. See väljendab *massi aditiivsuse* omadust.

Kiirus $\boldsymbol{V}$ on esitatav suuruse

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a} \tag{2.12}$$

täistuletisena aja järgi. Seda suurust nimetatakse süsteemi *masskeskmeks.*

Kinnise süsteemi liikumishulga jäävust saab formuleerida kui süsteemi masskeskme liikumist ühtlaselt ja sirgjooneliselt — see on inertsiseaduse üldistus.

Kinnist süsteemi vaadeldakse tihti just sellises taustsüsteemis, kus süsteemi masskese seisab.

Definitsioon 6. Seisva mehaanilise süsteemi energiat nimetatakse *siseenergiaks* ja tähistatakse E_i-ga.

Siseenergia sisaldab masspunktide vahelist suhtelise liikumise kineetilist energiat ja masspunktide vahel toimiva vastasmõju potensiaalset energiat. Kogu süsteemi energia, mis liigub kiirusega V, on

$$E = \frac{1}{2}\mu V^2 + E_i. \tag{2.13}$$

See seos järeldub seosest energiate vahel erinevates taustsüsteemides K ja K':

$$E = E' + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{P}' + \frac{1}{2}V^2, \tag{2.14}$$

kus (kui K' on süsteem, mille suhtes masskese seisab) võtta $\boldsymbol{P}' = 0$ ja $E' = E_i$.

2.5 Liikumishulga moment

Järgnevas tuletama jäävusseaduse, mis on tingitud ruumi isotroopsusest. Ruumi isotroopsus tähendab, et kinnise süsteemi mehaanilised omadused ei sõltu kui süsteemi kui tervikut pöörata ruumis suvalisel viisil. Vaatleme siis süsteemi lõpmatult väikest pööret, $\delta\boldsymbol{\phi}$, mille pikkus iseloomustab pöörde suurust $\delta\phi$ ja siht pöörlemise telge, ning leiame tingimused, kus Lagrange'i funktsioon on muutumatu süsteemi pööramisel ruumis.

Süsteemi mingi asukoha kohavektor $\boldsymbol{r}$ pöördel $\delta\boldsymbol{\phi}$ muutub suuruse

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r} \tag{2.15}$$

võrra, kus $|\delta\boldsymbol{r}| = r\sin\theta\delta\phi$ ja θ on nurk pöörlemistelje ja kohavektori vahel. Ilmselt, kui süsteemi pöörata, siis muutuvad lisaks kohavektoritele ja masspunkti kiiruste suunad, vastav muutus kiirusvektorites on:

$$\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v}. \tag{2.16}$$

Lagrange'i funktsiooni muutus pöördel $\delta\boldsymbol{\phi}$ peab olema null ehk

$$0 = \delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \cdot \delta\boldsymbol{v}_a \right) = \sum_a \left(\dot{\boldsymbol{p}}_a \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_a) + \boldsymbol{p}_a \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v}_a) \right). \tag{2.17}$$

Kasutades segakorrutise $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{bca}$ omadust, saame

$$\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_a (\boldsymbol{r}_a \times \dot{\boldsymbol{p}}_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{p}_a) = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a = 0. \tag{2.18}$$

Kuna $\delta\boldsymbol{\phi}$ on suvaline, siis järeldub, et vektor

$$\boldsymbol{M} \equiv \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a \tag{2.19}$$

on kinnise süsteemi liikumisintegraal ja seda nimetatakse süsteemi *liikumishulga momendiks* (või ka *kineetiliseks momendiks*). Liikumishulga moment on aditiivne ja seda sõltumata sellest kas süsteemi osad on vastasmõjus või mitte.

Kuna liikumishulga momendi definitsioon sisaldab masspunktide kohevektoreid, siis süsteemi liikumishulga moment sõltub ka taustsüsteemi valikust. Vaatleme kaht taustsüsteemi K ja K', kus K' alguspunkti kohavektor on $\boldsymbol{a}$ süsteemis K. Siis $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$ ja

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}. \tag{2.20}$$

[Tõesta!] Saadud tulemus näitab, et süsteemi liikumishulga moment sõltub taustsüsteemi alguspunktist väljaarvatud juhul kui süsteem kui tervik on paigal (s.t. $\boldsymbol{P} = 0$).

Vaatleme nüüd seost süsteemi liikumishulga momentide vahel kahes erinevas taustsüsteemis K ja K', kus viimane liigub kiirusega $\boldsymbol{V}$ esimese suhtes. Oletame, et mingil hetkel süsteemide alguspunktid kattuvad, siis masspunktide kohavektorid on samad mõlemas süsteemis aga kiirusvektorid on seotud: $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$. Leiame, et

$$\boldsymbol{M} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{M}' + \mu\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}. \tag{2.21}$$

Ehk mehaanilise süsteemi liikumishulga moment koosneb “sisemomendist”, mis on arvutatud taustsüsteemi suhtes, kus süsteem kui tervik on paigal ning momendist $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$, mis on tingitud süsteemi kui terviku liikumisest.

Süsteemi liikumishulga momendi komponentide jäävus võib kehtida ka välises väljas oleva süsteemi korral. Näiteks liikumishulga momendi komponent, mis on samas sihis aksiaalsümmeetrilise väljaga, on jääv suurus, seda muidugi juhul kui taustsüsteemi alguspunkt asub välja teljel.

Kõige tähtsamaks erijuhuks on siin *tsentraalne sümmeetriline väli* ehk *tsentraalne väli*, kus potensiaalne energia sõltub ainult kaugusest mingist punktist (*tsentrist*). Sellisel juhul liikumishulga momendi komponent, mis on piki tsentrit läbivat telge, on jääv suurus. Ehk liikumishulga moment on jääv kui see on määratud tsentraalse välja tsentri suhtes.

Süsteemi liikumishulga momendi komponenti suvalise telje sihtes saab leida Lagrange'i funktsiooni diferentseerimisest nurga kiiruse $\dot{\phi}_a$ järgi, kus ϕ on pöörlemisnurk antud telje suhtes. Tõepoolest, silindrilistes koordinaatides (r, ϕ, z)

$$M_z = \sum_a m_a(x_a\dot{y}_a - y_a\dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2\dot{\phi}_a \tag{2.22}$$

ja kui diferentseerida Lagrange'i funktsiooni

$$L = \frac{1}{2}\sum m_a(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\phi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U \tag{2.23}$$

$\dot{\phi}_a$ suhtes, siis saamega väite.

2.6 Mehaaniline sarnasus