Hamiltoni mehaanika seminar

§26 Sundvõnkumised hõõrdejõu olemasolul

§27 Parameetriline resonants

Mervi Sepp

November 07, 2005

1 Sundvõnkumised hõõrdejõu olemasolul

Sundvõngete teooriad on hõõrde arvestamisel ja mitte arvestamisel analooogsed. Siin on vaatluse all perioodilise välisjõuga juht. Liites võrrandi(25.1) $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$ paremale poole välise jõu $f\cos(\gamma t)$ ning jagades m -ga,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - \alpha\dot{x} + f\cos(\gamma t)| : m \\ \ddot{x} &= -\frac{kx}{m} - \frac{\alpha x}{m} + \frac{f\cos(\gamma t)}{m} \end{aligned} \tag{1}$$

ja arvestades, et

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{m}$$

saame liikumisvõrrandi

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos(\gamma t). \tag{2}$$

Läheme üle komplekstmuutujatele

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\exp[i\gamma t]. \tag{3}$$

Otsime integraali kujul $x = B\exp(i\gamma t)$

$$\dot{x} = \gamma i B \exp i\gamma t, \quad \ddot{x} = -\gamma^2 B \exp[i\gamma t]$$
$$\left(-\gamma^2 B + 2i\lambda\gamma B + \omega_0^2 B\right)\exp[i\gamma t] = \frac{f}{m}\exp[i\gamma t],$$

kus B avaldub siis kujul

$$B = \frac{f}{m(2\lambda\gamma i - \gamma^2 + \omega_0^2)}. \tag{4}$$

Kui võtta

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \tag{5}$$

$$\tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{6}$$

saame kirjutada $B = b\exp[i\delta]$. Võrrandist (5) on näha, et amplituud b kasvab kui γ läheneb ω_0^2-le, kuid ei muutu lõpmatuks nagu juhtub resonantsi korral siis, kui hõõre puudub.

Võttes reaalosa avaldisest $B\exp[i\gamma t] = b\exp[i(\gamma t + \delta)]$, saame

$$Re(B\exp[i\gamma t]) = Re(b\exp[i(\gamma t + \delta)])$$
$$B\cos(\gamma t) = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{7}$$

Võrrandi $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ lahend on $x = a\exp[-\lambda t]\cos(\omega t + \alpha)$ (juhul kui $\omega_0^2 > \lambda$) . Liites sellele saadud võrrandist (2) saadud integraali (7), saame

$$x = a\exp[-\lambda t]\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{8}$$

Esimene liige kahaneb ajas ekspodentsiaalselt ning peale teatud aja möödumist jääb järele ainult liige $x = b\cos(\gamma t + \delta)$.

Vaatleme resonantsile lähedasi sagedusi. Eeldame, et $\lambda \ll \omega_0$ ning võttes $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, kus ε on väike suurus, võime valemis (4) teha asendused

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0.$$

Seega

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \tag{9}$$

ehk

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \tan\delta = \lambda\varepsilon. \tag{10}$$

Kaugel resonantsist, kus $\gamma < \omega_0$ läheneb $\delta \to 0$ ning kus $\gamma > \omega_0$, $\delta \to -\pi$.

2 Parameetriline resonants

Eksisteerib võnkesüsteeme, mis pole suletud, kuid milles väline väli sõltub ainult ajas muutuvatest parameetritest. Üheks selliseks võnkesüsteemiks on näiteks pendel, mille kinnituskoht liigub perioodiliselt üles-alla. Sellise pendli leiab leheküljelt

http://monet.physik.unibas.ch/ elmer/pendulum/vpend.htm

Ühedimensionaalse süsteemi parameetrid on koefitsendid m ja k Lagrange'i funktsioonis (21.3)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

kui need koefitsendid sõltuvad ajast, siis liikumisvõrrand on

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

Millest saadakse peale t asendamist τ-ga reegli $d\tau = dt/m(t)$ järgi ja ümberkirutusi uus liikumisvõrrand kujul

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0. \tag{11}$$

Ülesande tingimused määravad funktsiooni $\omega(t)$ kuju. Olgu funktsioon $\omega(t)$ mingi sagedusega γ ja perioodiline perioodiga $T = 2\pi/\gamma$. See tähendab, et $\omega(t+T) = \omega(t)$, ning $\omega(t)$on seega invariantne teisendusel $t \to t+T$, millest järeldub, et kui $x(t)$ on lahend, siis ka $x(t+T)$ on lahend. Seega kui $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ on võrrandi (11) kaks sõltumatut lahendit, peavad nad olema iseendi lienaarsed kombinatsioonid kui t asendada $t+T$-ga.On võimalik valida x_1 ja x_2, et üleminek $t \to t+T$ tähendab lihtsalt konstandiga korrutamist

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t), \quad \mu_{1,2} = const. \tag{12}$$

Kõige üldisemad funktsioonid, millel on selline omadus, on

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T}\Pi_2(t), \tag{13}$$

kus $\Pi_{1,2}(t)$ on perioodilised funktsioonid perioodiga T. Konstantite μ_1 ja μ_2 vahel peab eksisteerima kindel seos. Korrutades

$$\begin{array}{rl} & \ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0| \cdot x_2 \\ - & \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0| \cdot x_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 &= \frac{d(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2)}{dt} = 0 \\ \dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x} &= const. \end{aligned} \tag{14}$$

Kui f asendada T-ga tähendab see suvalise funktsiooni $x_{1,2}(t)$ jaoks, mis on kujul (13), et need funktsioonid tuleb korrutada $\mu_1\mu_2$-ga, seega valemist (14) saame, et

$$\mu_1\mu_2 = 1. \tag{15}$$

Asjaolu, et võrrandis (11) on koefitsiendid reaalsed võimaldab hankida konstantide μ_1 ja μ_2 kohta lisainfot. Kui $x(t)$ on sellise võrrandi lahend, siis kaaskompleks funktsioon $x^*(t)$ peab samuti lahend olema. Siit järeldub, et μ_1 ja μ_2 peavad olema samad, mis μ_1^*,μ_2^*, st võimalikud on kaks varianti: kas $\mu_1 = \mu_2^*$ või nii μ_1 kui ka μ_2 on mõlemad reaalsed. Esimesel juhul annab (15) $\mu_1 = 1/\mu_1^*$, st $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$, mis tähendab, et konstantid on ühikulise pikkusega; teisel juhul on võrrandil (11) kaks sõltumatut lahendit

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{-t/T}\Pi_2(t), \tag{16}$$

kus μ omab kas positiivset või negatiivset reaalset väärtust ja $|\mu| \neq 1$. Üks nendest funktsioonidest (sõltuvalt sellest, kas $|\mu| > 1$ või $|\mu| < 1$) kasvab ajas ekspodentsiaalselt. See tähendab, et süsteem on tasakaaluolekus ebastabiilne ning suvaline kuitahes väike kõrvalekalle sellest olekust, põhjustab kiiresti x-i suure muutuse. Seda nimetatakse *parameetriliseks resonantsiks*.

Kui tavalise resonantsi korral kasvab amplituud ajas isegi siis, kui x ja $\dot{x}$ algväärtused on nullid, siis parameetrilise resonantsi korral see nii ei ole ning x ja $\dot{x}$ jäävad nulliks.