Hamiltoni mehaanika seminar

§28 Anharmoonilised võnkumised, §29 Resonants mittelineaarsete võnkumiste korral, §30 Liikumine kiirelt ostsilleeruvas väljas

Liis Rebane

7. november 2005

1 Anharmoonilised võnkumised

Väikeste ostsillatsioonide teooria baseerub süsteemi energia ritta-arendusel koordinaatide ja kiiruste jägi, võttes arvesse ainult esimesi nullist erinevaid ritta-arenduse liikmed. Sellisel juhul saame lineaarsed liikumisvõrrandid, mis kirjeldavad lineaarseid võnkumisi.Võttes arvesse ka kõrgemat järku ritta-arenduse liikmed, saame liikumisvõrrandid anharmooniliste e. mittelineaarseid võnkumiste kirjeldamiseks.

Käsitleme Lagrange funktsiooni ritta-arendust kuni kolmandat järku liikmeteni:

$$L = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_ix_k) + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l} n_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_k x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} l_{ikl}x_ix_kx_l\right), \tag{1}$$

kus $x_i = q_i - q_{i0}$ ja q_0 on tasakaaluasend.

Seejärel läheme üle lineaarse lähenduse normaalkoordinaatidele Q_α. Lagrange funktsioon omandab kuju:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \tag{2}$$

Vastavad liikumisvõrrandid on:

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \tag{3}$$

kus f_α on teist järku harmoonilised funktsioonid koordinaatidest ja nende tuletistest.

Otsime lahendit kujul:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \tag{4}$$

kus $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ ja $Q_\alpha^{(1)}$ on lineaarse võrrandi $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$ lahendid - harmoonilised võnkumised:

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \tag{5}$$

Seejärel saame lahendada võrrandi $Q_\alpha^{(2)}$ suhtes.

Teist järku lähendi tulemusel lisanduvad vñkumised sagedustega $\omega_\alpha \pm \omega_\beta$, mis liidetakse süsteemi omavñkumistele. Neid nimetatakse kombineeritud sagedusteks.

Kõrgemat järku lähenduste korral esinevad kombineeritud sagedused, mis on summad rohkem kui kahest ω_α ning olukord muutub keerukamaks. Näiteks kolmandat järku lähenduse korral langevad osad kombinatsioonsagedused kokku omavõnkesagedusega ($\omega_\alpha = \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$). Kasutades eelnevalt esitatud meetodit, esinevad liikumisvõrrandi vasakus pooles resonants-liikmed. Füüsikaliselt ei saa suletud süsteemis ostsillatsioonide tugevus iseeneslikult kasvada.

Seega tuleb kõrgemat järku lähenduste korral esitatud meetodit modifitseerida nii, et lahendi perioodilised kordajad ei sisalda mitte ligikaudset, vaid täpset võnkesageduse väärtust. Muutused sagedustes leiame võrdsustedes resonatsliikmed nulliga.

Näide

Ühedimensionaalsete anharmooniliste võnkumiste Lagrange funktsioon on antud kujul:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{3}m\alpha x^3 - \frac{1}{4}m\beta x^4. \tag{6}$$

Siit saame liikumisvõrrandid:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{7}$$

Otsime lahendit kuni kolmandat järku liikmeteni: $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, kus $x^{(1)} = a\cos\omega t$ ning ω on põhisageduse täpne väärtus, mis omakorda avaldub: $\omega = \omega_0\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + ...$ Selleks et liikumisvõrrandi (7) vasak pool annaks $x^{(1)}$ korral nulli, kirjutame ta ümber kujule:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{8}$$

Asendame võrrandisse $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ja $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ ning võtame arvesse ainult kuni teist järku väikesed liikmed. Saame $x^{(2)}$ jaoks võrrandi:

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0\omega^{(1)} a\cos\omega t \tag{9}$$

Selleks, et resonantsi ei tekiks, saame tingimuse: $\omega^{(1)} = 0$. Edasi saame lahendada mitehomogeense lineaarse võrrandi $x^{(2)}$ suhtes. Analoogiliselt saame leida kolmandat järku lähendi $x^{(3)}$.

2 Resonants mittelineaarsete võnkumiste korral

Kui võtta arvesse sundvõnkumiste anharmoonilised liikmed, siis ka resonantsile lisanduvad huvitavad omadused. Kasutame eelnevalt alustatud näidet, ning lisame võrrandisse (6) periodilise välilsjõu sagedusega γ ja hõõrdejõu sumbuvusteguriga λ (eeldame, et väike). Saame:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m)\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \tag{10}$$

Eeldame, et $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, kus ε on väike suurus - seega on tegemist resonatssagedusele lähedase väärtusega.

Lineaarse lähenduse korral, amplituud b on antud kujul:

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = f^2/(4m^2\omega_0^2) \tag{11}$$

Võnkumiste mittelineaarsuse korral omavõnkesagedus muutub amplituudist sõltuvaks ($\omega_0 + \kappa b^2$). Asendades selle võrrandisse (11), saame:

$$b^2((\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2) = f^2/(4m^2\omega_0^2), \tag{12}$$

mis on kuupvõrrand b^2 suhtes. Selle reaalsed juured annavad sundvõnkumiste amplituudid. Vaatleme kuidas see amplituud sõltub fikseeritud amplituudiga f välisjõu sagedusest.

Kui f on piisavalt väike, siis amplituud b on samuti väike ja me saame ära jätta b^2 kõrgemat järku liikmed. Seega kirjeldab amplituudi võrrand (11), milleks on sümmeetriline kõver, mille maksimum on $\varepsilon = 0$ kohal. Kui f suureneb, siis kõver muudab kuju, esialgselt säilitades ̈hese maksimumi. Lio aga f ületab teatava kriitilise väärtuse f_k, siis eksisteerib sagedusvahemik, milles võrrand (12) omab kolme reaalset juurt.

3 Liikumine kiirelt ostsilleeruvas väljas

Vaatleme osakest ajast sõltumatus välises väljas potentsiaaliga U, millele mõjub lisaks jõud:

$$f = f_1\cos\omega t + f_2\sin\omega t, \tag{13}$$

kus f_1 ja f_2 sõltuvad ainult koordinadist ning $\omega \gg 1/T$, kus T on potentsiaali U põhjustatud perioodilise liikumise periood. Välisjõudu f loeme suurusjärgult võrreldavaks potentsiaali U poolt tekitatud jõududega, ent eeldame, et jõu f poolt tekitatud osakese võnkumised on väikesed.

Vaatleme 1D liikumist väljas, mis sõltub ainult koordinaadist. Liikumisvõrrandiks on:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \tag{14}$$

Vaatleme $x(t)$ kujul

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{15}$$

kus $X(t)$ kirjeldab sujuvat kulgevat liikumist, ning $\xi(t)$ väikeseid võnkumisi sagedusega ω. ξ keskväärtus ühe võnkeperioodi jooksul on 0. Seega koordinaadi keskväärtuseks on $\bar{x} = X(t)$. Leiame võrrandi, millest määrata $X(t)$.

Asendame (15) liikumisvõrrandisse (14) ning arendame ritta ξ esimeste liikmeteni. Saame:

$$m\ddot{X} + m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \xi\frac{d^2U}{dx^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X} \tag{16}$$

Vaatleme eraldi ostsilleeruvaid ja ostsilleruvat ja sujuvat liikumist kirjeldavaid liikmeid. Istsilleeruvate liikmete jaoks saame:

$$m\ddot{x} = f(X,t) \tag{17}$$

Ära on jäetud liikmed, mis sisaldavad $\ddot{\xi}$-ga võrreldes kõrgemat järku väikest suurust ξ. Inegreerides saame:

$$\xi = -f/(m\omega^2) \tag{18}$$

Keskmistame võrrandi (16) aja järgi. f ja ξ esimest järku liikmete keskväärtused on nullid. Seega saame:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} + \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}, \tag{19}$$

mis sisaldab ainult $X(t)$-d. Eelneva võrrandi saame esitada kujul:

$$m\ddot{X} = -dU_{eff}/dX, \tag{20}$$

kus U_{eff} - efektiivne potentsiaalne energia on defineeritud kui:

$$U_{eff} = U + \overline{f^2}/(2m\omega^2) \tag{21}$$

Võrreldes tulemust valemga (18), saame potentsiaalse energia kirjutada kujule:

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2}m\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{22}$$

Seega kirjeldab osakese keskmistatud liikumist potentsiaal U, millele on lisatud konstantne suurus - osakese ostsilleeruva liikumise keskmine kineetiline energia.