Hamiltoni mehaanika seminar
33. Jäiga keha pöördemoment
34. Jäiga keha liikumisvõrrandid
35. Euleri nurgad

Kert Tamm, 992530YAFM

2005

Kert Tamm. Hamiltoni mehaanika seminar.

- Jäiga keha pöördemoment (pealiskaudselt)
- Jäiga keha liikumisvõrrandid
- Euleri nurgad

1 Jäiga keha pöördemoment

Süsteemi pöördemomendi väärtus sõltub sellest millise punkti suhtes me seda vaatleme. Nagu eelnevast peaks teada olema. Jäiga keha mehaanikas on sobiv valida selleks punktis keha masskese (ning paigutada sinna ka koordinaatide alguspunkt). Järgnevas tähistatakse selliselt defineeritud pöördemomenti $\vec{M}$ -ga. Eespool on näidatud, et juhul kui koordinaatide alguspunkt langeb kokku keha masskeskmega, siis keha kulgliikumine (koordinaadid sõidavad masskeskmega kaasa) pöördemomenti ei anna, ning kogu pöördemomendi moodustab keha enda pöördliikumine oma masskeskme suhtes. Eelnevalt antud definitsioonis $\vec{M} = \Sigma m\vec{r} \times \vec{v}$ asendame $\vec{v}$ avaldisega $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ (m - mass, $\vec{v}$ - joonkiirus punktis, $\vec{r}$ - raadiusvektor masskeskmest, $\vec{\Omega}$ - nurkkiirus) :

$$\vec{M} = \Sigma m\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \Sigma m[r^2\vec{\Omega} - \vec{r}(\vec{r} \bullet \vec{\Omega})]$$

Minnes siinjuures üle tensorkujule (lk. 106 kirjanduses) ning arvestades inertsi tensori definitiooni ($I_{ik} = \Sigma m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)$ kus δ_{ik} on ühiktensor) on tulemuseks

$$M_i = I_{ik} \cdot \Omega_k$$

Selline avaldis on äärmiselt mugav juhuks kui keha inertsiaalpeateljed langevad kokku valitud koordinaattelgedega x_1, x_2, x_3. Siis viimasest avaldisest on lihtne saada $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$. Erijuhul, kui inertsi peateljed on võrdsed (sfääriline juht) on tulemuseks lihtsalt

$$\vec{M} = \vec{I} \bullet \vec{\Omega}$$

ehk pöördemomendi vektor on propotsionaalne nurkkiiruse vektoriga ning samas suunas. Suvalisel juhul see muidugi nii ei ole, kuid kui keha juhtub pöörlema ümber mõne oma inertsiaal peatelgedest on sellega arvutused tunduvalt lihtsustunud. (Huvilistel on võimalik tutvuda pretsessiooni nime kandva nähtusega lk 106 - 107 kirjanuduses).

2 Jäiga keha liikumisvõrrandid

Kõige üldisemal juhul on jäigal kehal kuus vabadusastet. See tingib selle, et kõige üldisemal juhul vajame me jäiga keha liikumise kirjeldamiseks kuut liikumisvõrrandit. Üks võimalusi seda saavutada on kirjutada nad vektoritena, mis sisaldavad tuletisi aja järgi ning kasutada pöördemomenti ning momenti. Sellisel juhul esimese võrrandi saame, summeerides keha punktidele mõjuvaid jõudusid. Teades, et keha kogumoment on $\vec{P} = \Sigma\vec{p} = \mu\vec{V}$ ning kogu kehale mõjuv jõud on $\vec{F} = \Sigma\vec{f}$ saab lihtsalt kirjutada:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Siinjuures on mainimist väärt, et kuigi $\vec{F}$ on defineeritud kui kehale punktidele mõjuvate *kõikide* jõudude summa (kaasa arvatud osakeste omavahel mõjuvad jõud) taandub see üsna lihtsalt ainult keha punktidele *väljastpoolt* mõjuvate jõudude summaks (tasakaalutingimuste abil).

Kui nüüd U on jäiga keha potensiaalne energia välises väljas, siis saame me leida jõu $\vec{F}$ diferentseerides U-d koordinaatide järgi keha masskeskme suhtes.

$$\vec{F} = \frac{-\partial U}{\partial\vec{R}}$$

Ehk lahtiseletatult , juhul kui keha läbib väikese vahemaa $\delta\vec{R}$ muutub raadiusvektor $\vec{r}$ keha iga punkti jaoks $\delta\vec{R}$ võrra millisel juhul potensiaalse energia muutus on

$$\delta U = \Sigma(\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\dot{\delta}\vec{r} = \delta\vec{R}\bullet\Sigma\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} = -R\bullet\Sigma\vec{f} = -\vec{F}\bullet\delta\vec{R}.$$

Järgnevalt formuleerime teise liikumisvõrrandi kasutades pöördemomendi $\vec{M}$ tuletist aja järgi. Selleks et tuletist oleks mugavam võtta on kaval valida 'fikseeritud' (inertsiaalne) taussüsteem selliselt, et jäiga keha masskese selles taussüsteemis on paigal sellel ajahetkel kui tuletisi leitakse. Niisiis, olgu meil

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\Sigma\vec{r}\times\vec{p} = \Sigma\dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \Sigma\vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

Valides taustsüsteemi (arvestades, et $\vec{V} = \vec{0}$) on selge, et $\dot{\vec{r}}$ on sama mis $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Kuna vektorid $\vec{v}$ ja $\vec{p} = m\vec{v}$ on paraleelsed, siis $\dot{\vec{r}}\times\vec{p} = 0$. Asendades nüüd $\dot{\vec{p}}$ jõuga $\vec{f}$ saame lõpuks

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

kus

$$\vec{K} = \Sigma \vec{r} \times \vec{f}$$

Antud kontruktsiooni eeliseks on see, et pöördemoment $\vec{M}$ on defineeritud keha masskeskme suhtes. Seega kui me nüüd hüppame selliste koordinaatsüsteemide vahel siis jääb $\vec{M}$ samaks (tingimus $\vec{R} = 0$). See omakorda aga laseb meil väita, et liikumisvõrrand mis on tuletatud antud juhul konkreetse taustsüsteemi tarbeks kehtib suvalises inertsiaalses taustsüsteemis (Galilei relatiivsusprintsiibi alusel).

Vektorit $\vec{r} \times \vec{f}$ nimetatakse jõu $\vec{f}$ *momendiks* ning $\vec{K}$ on kehale mõjuv kogumoment. Siinjuures on märkimist väärt, et $\vec{K}$ avaldis sõtub ainult kehale mõjuvatest *välisjõududest*, kuna keha osakeste vahel mõjuvatest jõududest tingitud momendid taanuvad välja keha pöördemomendi jäävuse seadusest tulenevalt.

Jõumoment, nii nagu ka pöördemoment sõltub koordinaatide alguspunkti valikust. Eelnevas (ning tavaliselt ka nii tehakse) on see defineeritud keha masskeskme suhtes. Juhul kui valida koordinaatide alguspunkt mujale kui keha masskeskmesse tuleb leida jõumoment keha masskesme suhtes, ning lisada sellele parandus koordinaatide alguspunkti suhtes (lk. 109 kuni 110 kirjanduses).

3 Euleri nurgad

Nagu eespool on näidatud, saab jäiga keha liikumist kirjeldada kolme koordinaadiga mis on kinnitatud keha masskeskmesse ning kolme nurgaga mis määravad ära koordinaatide x_1, x_2, x_3 asendi fikseeritud koordinaatide X, Y, Z suhtes. Need nurgad on tavaliselt võimalik valida nii, et nendega on mugav majandada. Selliselt valitud nurkasid nimetatakse tavaliselt Euleri nurkadeks (joonis 47 kirjanduses). Kuna antud juhul huvitavad meid millegipärast vaid koordinaatide omavahelised nurgad, võtame me algolukorra selliselt, et fikseeritud ning kaasaliikuvate koordinaatide alguspunktid ühtivad. Olgu meil liikuv tasapind x_1x_2 mis lõikab fikseeritud tasapinda XY mööda mingit joont ON (mis kannab *sõlmjoone* nimetust). Ilmselt on see joon risti nii Z-telejga kui ka x_3 teljega. Defineerigem siinjuures positiivne suund kui vektorkorrutise $\vec{z} \times \vec{x_3}$ postiivne suund (kus $\vec{z}$ ning $\vec{x_3}$ on vastavad ühikvektorid piki telgesid Z ja x_3).

Nurgad defineerigem järgnevalt. Olgu nurk $\Theta(Theta)$ telgede Z ning x_3 vahel, nurk $\Phi(Phi)$ telje X ning sõlmjoone ON vahel ning nurk $\Psi(Psi)$ telje x_1 ning sõlmjoone ON vahel. Nurgad Φ ja Ψ on määratud vastavalt Z

ning x_3 telgede ümber kruvireegli abil (Parema käe kruvireegli üks sõnastusi: "Kui keha pöörlemissuund võtta tavalise (parempoolse vindiga) kruvi pöördumissuunaks, siis ühtib kruvi liikumissuund pöördenurga vektori suunaga."). Nurk Θ omandab väärtusi vahemikus 0 kuni π ning nurgad Φ ja Ψ vahemikus 0 kuni 2π.

Selleks, et näidata sellise konstruktsiooni kasutamise mugavust avaldagem järgnevalt nurkkiiruse vektori $\vec{\Omega}$ komponendid kehaga seotud telgede x_1, x_2, x_3 suunas Euleri nurkade ning nende tuletiste kaudu. Selle saavutamiseks tuleks alutuseks leida nurkkiiruse komponendid $(\vec{\dot{\Theta}}, \vec{\dot{\Phi}}, \vec{\dot{\Psi}})$ nende telgede sihis. Nurkkiirus $\vec{\dot{\Theta}}$ paikneb sõlmjoone ON sihis ning selle komponendid on $(\vec{\dot{\Theta}}_1 = \vec{\dot{\Theta}} \cdot \cos(\Psi), \vec{\dot{\Theta}}_2 = -\vec{\dot{\Theta}} \cdot \sin(\Psi), \vec{\dot{\Theta}}_3 = 0)$. Nurkkiirus $\vec{\dot{\Phi}}$ paikneb Z - telje sihis. Siinjuures selle komponent mööda x_3 telge on $\vec{\dot{\Phi}}_3 = \vec{\dot{\Phi}} \cdot \cos(\Theta)$ ning x_1x_2 tasandil $\vec{\dot{\Phi}} \sin(\Theta)$. Lahendades viimase piki x_1 ja x_2 telgi saame $\vec{\dot{\Phi}}_1 = \vec{\dot{\Phi}} \sin(\Theta) \cdot \sin(\Psi)$ ja $\vec{\dot{\Phi}}_2 = \vec{\dot{\Phi}} \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\Psi)$. Lõpuks, nurkkiirus $\vec{\dot{\Psi}}$ on x_3 telje suunas. Korjates nüüd nurkiiruse komponendid kokku iga telje suunas, saame me süsteemi

$$\Omega_1 = \dot{\Phi} \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\Psi) + \dot{\Theta} \cdot \cos(\dot{\Psi})$$

$$\Omega_2 = \dot{\Phi} \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\Psi) - \dot{\Theta} \sin(\Psi)$$

$$\Omega_3 = \dot{\Psi} \cdot \cos(\Theta) + \dot{\Psi}$$

Antud lähenemise eelis seisneb selles, et juhul kui teljed x_1, x_2, x_3 valida kokkulangevalt keha peainertsiaal telgedega, siis on keha pöörlemisest tuleneva kineetilise energia komponendi leidmine tunduvalt mugavam kui üldjuhul. Sümmeetrilisel juhul ($I_1 = I_2 \neq I_3$) avaldub keha pöörlemise kineetiline energia kui

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\Phi}^2 \sin^2(\Theta) + (\dot{\Theta})^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\Phi} \cos(\Theta) + \dot{\Psi})^2$$

Sellise avaldise saamine peaks olema üsnagi lihtne arvestades, et sümmeetrilisel juhul võib telgi x_1 ja x_2 valida suvaliselt. Kui nüüd valida telg x_1 piki sõlmjoont ON (ehk $\Psi = 0$) siis nurkkiiruse komponendid omandavad kuju $\Omega_1 = \dot{\Theta}$, $\Omega_2 = \dot{\Phi} \sin(\Theta)$ ning $\Omega_3 = \dot{\Phi} \cos(\Theta) + \dot{\Psi}$.