Loeng 4

Kanoonilised võrrandid

4.1 Meeldetuletus

Mingi süsteemi kirjeldamisel Lagrange formalismi raames lähtutakse sellest, et

- mingit süsteemi olekut kirjeldab üldistatud koordinaatide q mingid väärtused,
- eksisteerib süsteemi kirjeldav Lagrange funktsioon $L = L(q, \dot{q}, \ldots, t)$,
- süsteem liigub olekust $q^{(1)} = q(t_1)$ olekusse $q^{(2)} = q(t_2)$ mööda sellist trajektoori $q^* = q^*(t)$, mille korral mõjuintergraal

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), \ldots, t)\, dt \tag{4.1}$$

omandab minimaalse väärtuse kõigi punkte $q^{(1)}$ ja $q^{(2)}$ läbivate trajektooride hulgal.

Olulisemad järeldused:

- Mõjuintegraali minimiseeriv trajektoor rahuldab Lagrange võrrandeid:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) + \ldots = 0. \tag{4.2}$$

- Mehaanilise süsteemi korral on süsteemi olek üheselt määratud üldistatud koordinaatide ja kiiruste väärtustega ning sellisel juhul Lagrange funktsioon on funktsioon ainult üldistatud koordinaatidest, kiirustest ja ajast: $L = L(q, \dot{q}, t)$. Kinnise mehaanilise süsteemi korral $L = L(q, \dot{q})$.
- Mehaanilise süsteemi korral Lagrange võrrandid on II-järku diferentsiaalvõrrandid.
- Kinnisel mehaanilisel süsteemil on $2s - 1$ liikumiskonstanti, millest esimesed 7 on

  Energia $E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ **jäävus** - järeldub aja homogeensusest,

Liikumishulga $\boldsymbol{P} = \sum_a \boldsymbol{p}_a$ jäävus - järeldub ruumi homogeensusest,

Liikumishulga momendi $\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a$ jäävus - järeldub ruumi isotroopsusest.

- Kui süsteem koosneb mitmest alamsüsteemist, mis ei ole paari kaupa vastasmõjus, siis kogu süsteemi Lagrange funktsioon on alamsüsteemide Lagrange funktsioonide summa.

- Lagrange funktsioonid $L(q, \dot{q}, t)$ ja $L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$ on ekvivalentsed ehk nende mõjuintegraalide väärtused on võrdsed liidetava konstandi täpsusega.

- Defineerides üldistatud liikumishulga $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ja üldistatud jõu $F = \frac{\partial L}{\partial q}$, on Lagrange võrrandid kujul $\dot{p} = F$.

4.2 Hamiltoni võrrandid

Kasutades Lagrange funktsiooni süsteemi kirjeldamiseks, sai tuletada Lagrange liikumisvõrrandid, mis on II-järku diferentsiaalvõrrandid. Järgnevas toome sisse Lagrange funktsiooni nn Legendre teisenduse funktsiooni, mis samuti kirjeldab süsteemi, kuid sellest tuletatavad liikumisvõrrandid on I-järku diferentsiaalvõrrandid ja seega paljude ülesannete korral lihtsamalt lahendatavad.

4.2.1 Legendre teisendus

Definitsioon 7. Öeldakse, et kaks diferentseeruvat funktsiooni $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ on üksteise *Legendre teisendused* kui nende esimesed tuletised on teineteise pöördfunktsioonid: $f' = (g')^{-1}$ ehk $(g')^{-1}(f'(x)) = x$ ja vastupidi.

Lause 4.2.1. *Funktsiooni $y = f(x)$ Legendre teisendus $x = g(y)$ on leitav järgmise valemiga:*

$$g(y) = y(f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)) \tag{4.3}$$

Ilmselt on Legendre teisendused määratud konstandi täpsusega. Tihti konstant määratakse tingimusest

$$f(x) + g(y) = x \cdot y. \tag{4.4}$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $f(x) = x^2 - x$ Legendre teisenduse $g(y)$. Esiteks definitsiooni järgi: $f'(x) = 2x - 1$, $(f')^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1) = g'(y)$. $g(y) = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + C$. Teiseks valemi järgi: $g(y) = y\frac{1}{2}(y+1) - f(\frac{1}{2}(y+1)) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - (\frac{1}{4}(y+1)^2 - \frac{1}{2}(y+1)) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$.

Näide 2. Funktsiooni $f(x) = \sin(x)$ Legendre teisendus on $g(y) = y \arccos y - \sqrt{1 - y^2}$.

4.2.2 Legendre teisendus II

Vaatleme kumerat funktsiooni $y = f(x)$ mingis punktis x^*. Funktsiooni $y = f(x)$ puutujaks selles punktis on sirge $y = ux - v$, kus $u = f'(x^*)$ ja $v = ux^* - f(x^*)$. Funktsiooni f-i kumeruse tõttu on $u = f'(x^*)$ monotoone funktsioon x^* suhtes ja seega eksisteerib selle pöördfunktsioon $x^* = (f')^{-1}(u)$ ning saame, et $v = g(u)$. Funktsiooni $v = g(u)$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *Legendre teisenduseks* ja see sisaldab kogu informatsiooni funktsiooni f graafiku kohta selle puutuja sirgete poolt moodustatud mähisjoone kujul.

Mingi funktsiooni $f = f(x)$ Legendre teisendus $g = g(u)$ on väga lihtsalt leitav. Selleks tuleb vaid korrutisest xu lahutada funktsioon ise arvestades, et $x = (f')^{-1}(u)$: $g(u) = xu - f(x)$.

Funktsiooni Legendre teisendus tähendab ka muutujavahetust võttes uueks muutujaks funktsiooni tuletise. Tõepoolest, vaatleme funktsiooni $f = f(x)$ muutu $df = u\,dx$, kus $u = f'(x)$. Kirjutame $df = d(ux) - x\,du$ ehk $d(ux - f) = x\,du$. Tähistame $g = ux - f$, mis on f-i Legendre teisendus, siis $dg = x\,du$, kus $x = g'(u)$. Geomeetrias Legendre teisendust nimetatakse ka kontaktteisenduseks. Muutujat u nimetatakse x-i *kanooniliseks kaasmuutujaks.*

4.2.3 Hamiltoni funktsioon

Vaatleme Lagrange funktsiooni $L = L(q, \dot{q}, t)$ ning selle Legendre teisendust muutuja $\dot{q}$ suhtes. Vastavaks kanooniliseks kaasmuutujaks osutub üldistatud liikumishulk $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ning Legendre teisenduseks on siis $H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$, kus $\dot{q} = (L_{\dot{q}})^{(-1)}(p)$. Funktsiooni $H(q, p, t)$ nimetatakse süsteemi *Hamiltoni funktsiooniks* ja see on süsteemi energia funktsiooniks.

Leiame Hamiltoni funktsiooni muudu:

$$\begin{aligned} dH = \frac{\partial H}{\partial q}\,dq + \frac{\partial H}{\partial p}\,dp + \frac{\partial H}{\partial t}\,dt &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,d\dot{q} + \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial q}\,dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt \\ &= \dot{q}\,dp - \dot{p}\,dq - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kus kasutati Lagrange liikumisvõrrandit $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Seega

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{4.6}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.8}$$

Kahte esimest võrrandit nimetatakse *Hamiltoni liikumisvõrranditeks* ehk ka *kanoonilisteks võrranditeks.*

Kui Lagrange funktsioon sisaldab mingit parameetrit λ, mis iseloomustab süsteemi mingit omadust või süsteemile mõjuvat välist välja, siis Lagrange funktsiooni ja Hamiltoni funktsiooni tuletised selle parameetri suhtes on seotud järgmiselt:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda}. \tag{4.9}$$

4.3 Routhi funktsioon

Teatud ülesannete juures on kasulik minna kiiruselt üle liikumishulgale vaid osade muutujate korral. Näiteks juhtudel, kus mõned koordinaadid on tsüklilised.

Vaatleme Lagrange funktsiooni $L = L(q, \dot{q}, \xi, \dot{\xi})$, millele vastavad Lagrange liikumisvõrrandid on

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \xi}. \tag{4.11}$$

Teeme L-le muutuja vahetuse $\dot{q} \to p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \tag{4.12}$$

funktsiooni R nimetatakse *Routhi funktsiooniks*[1]. Leiame Routhi funktsiooni muudu

$$dR = p\,d\dot{q} + \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial q}\,dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi} \;= \dot{q}\,dp - \dot{p}\,dq - \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi}, \tag{4.13}$$

ehk saame

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \tag{4.14}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{4.16}$$

Seega Routhi funktsiooni on Hamiltoni funktsioon koordinaadi q suhtes ja Lagrange funktsioon koordinaadi ξ suhtes.

Süsteemi energia üldise definitsiooni järgi

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{4.17}$$

[1]Edward Routh, 20 Jan 1831–7 June 1907, Cambridge'i ülikooli üks edukamaid õppejõusid, 30-ne aasta jooksul 700-st juhendatavast 480 lõpetasid omades esimest järku tulemust matemaatikas (*Wranglerid*), kokku oli sellel ajavahemikul 900 sellise tulemusega lõpetanut.

Oletame, et koordinaat q on tsükliline. Siis L, ja järelikult ka R, ei sõltu q-st. Hamiltoni teisest võrrandist järelduv siis, et $p = Const$. Kui asendada see konstant Lagrange võrrandisse, siis see muutub ainult muutujast ξ sõltuvaks võrrandiks — sellega on täielikult elimineeritud tsükliline muutuja. Leides lahendi $\xi = \xi(t)$, saame leida funktsiooni $q(t)$ integreerides võrrandit $\dot{q} = \frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p}$ otse.