Oletame, et koordinaat q on tsükliline. Siis L, ja järelikult ka R, ei sõltu q-st. Hamiltoni teisest võrrandist järelduv siis, et $p = Const$. Kui asendada see konstant Lagrange võrrandisse, siis see muutub ainult muutujast ξ sõltuvaks võrrandiks — sellega on täielikult elimineeritud tsükliline muutuja. Leides lahendi $\xi = \xi(t)$, saame leida funktsiooni $q(t)$ integreerides võrrandit $\dot{q} = \frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p}$ otse.

4.4 Poissoni sulud

Vaatleme funktsiooni $f = f(q, p, t)$ ja leiame kasutades Hamiltoni võrrandeid:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], \tag{4.18}$$

kus sulgu

$$[f, H] = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.19}$$

nimetatakse funktsioonide *Poissoni suluks.*

Kahe funktsiooni f, g Poissoni sulul on järgmised omadused:

$$\begin{aligned}
[f, g] &= -[g, f], && (4.20)\\
[f, c] &= 0, && (4.21)\\
[f_1 + f_2, g] &= [f_1, g] + [f_2, g], && \text{(bilineaarsus)}\\
[f_1 f_2, g] &= f_1[f_2, g] + f_2[f_1, g], &&\\
\frac{\partial}{\partial t}[f, g] &= [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}], && \text{(Leibnizi reegel)}\\
\frac{d}{dt}[f, g] &= [\frac{df}{dt}, g] + [f, \frac{dg}{dt}], &&\\
[f, q] &= -\frac{\partial f}{\partial p}, && (4.22)\\
[f, p] &= \frac{\partial f}{\partial q}, && (4.23)\\
[q, q] = [p, p] &= 0, \qquad [q, p] = 1, && (4.24)\\
[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= 0. && (4.25)
\end{aligned}$$

Viimast seost nimetatakse *Jakobi samasuseks.* Selle tõestamiseks kasutame Leibnizi reeglit ja omadust $\frac{df}{d=}[f, H]$ (lihtsuse mõttes eeldame, et funktsioonid ei sõlut ajast). Siis ühelt poolt $\frac{d}{dt}[f, g] = [[f, g], H]$ ja teiselt poolt $\frac{d}{dt}[f, g] = [\frac{df}{dt}, g] + [f, \frac{dg}{dt}] = [[f, H], g] + [f, [g, H]]$. Kokkuvõttes saame $[[f, g], H] = [[f, H], g] + [f, [g, H]]$ ehk $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$.

4.4.1 Liikumisintegraalid

Oletame, et f on liikumisintegraal ja see ei sõltu ajast. Siis selle Poissoni sulg on $[f, H] = 0$.

Olgu f ja g kaks liikumisintegraali ja kasutades Leibnizi reeglit, on lihtne näha, et $\frac{d}{dt}[f, g] = 0$. Ehk kahe liikumisintegraali Poissoni sulg on ka liikumisintegraal. Sellest järelduvate seost $[f, g] = const$ nimetatakse *Poissoni teoreemiks*. Poissoni sulg ei pruugi alati genereerida uusi liikumisintegraale, selle tulemuseks võib olla 0 või mingi algsete liikumisintegraalide kombinatsioon.

4.5 Mõjuintegraal kui funktsioon koordinaatidest

Vaatleme mõjuintegraali

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{4.26}$$

ja seda minimiseerivaid trajektoore. Varem vaatlesime juhtu, kus trajektoori alg- ja lõpp-punktid, samuti alg- ja lõppajahetked olid fikseeritud, järgnvas aga vaatleme mõjuintegraali kui suuruste $t_1, t_2, q^{(1)}, q^{(2)}$ funktsioonina.

Vaatleme esialgu juhtu $S = S(q^{(2)})$. Siis

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - Uxt\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\, dt. \tag{4.27}$$

Arvestades, et $\delta q(t_1) = 0$ ja tähistame $\delta q(t_2) = \delta q$ ning kasutame seost $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, siis

$$\delta S = p\delta q, \tag{4.28}$$

ehk

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{4.29}$$

Vaatleme nüüd juhtu $S = S(q^{(2)}, t_2)$ ja leiame $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q}$. Kuna $\frac{dS}{dt} = L$, siis saame

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{4.30}$$

ja $dS = p\, dq - H\, dt$. Ilmselt dS on täielik diferentsiaal (s.t. $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}$).

Kõige üldisemal juhul $S = S(q^{(1)}, t^{(1)}, q^{(2)}, t^{(2)})$ saame, et

$$dS = p^{(2)}\, dq^{(2)} - H^{(2)}\, dt^{(2)} - p^{(1)}\, dq^{(1)} + H^{(1)}\, dt^{(1)}. \tag{4.31}$$

Seda seost saab kasutada, et leida, millistel tingimustel süsteemi lõppolek saab sõltuda algolekust: $(q, t)^{(2)} = F(q^{(1)}, t^{(1)})$. Funktsioon F ei saa olla päris suvaline, see peab olema selline, et dS oleks täielik differentsiaal. See tingimus tähendab, et võimalike liikumiste jaoks on teatud piirangud, ja seda sõltumata välistest jõududest. Selliseid tingimusi uurib näiteks geomeetriline optika.

4.6 Maupertuisi printsiip

Üldiselt on mehaanilise süsteemi liikumine täielikult määratud vähima mõju printsiibiga: integreeridest sellest tuletatud võrrandid, saame leida süsteemi trajektori funktsiooni sõltuvusena ajast. Järgnevas aga vaatleme ülesannet, kus eesmärgiks on leida vaide süsteemi trajektori kuju, aja sõltuvus ei pakuks siis huvi. Järgnevas vaatleme ainult kinniseid süsteeme, ehk juhte, kus $H(p, q) = E = const$.

Mõjuintegraali muutus, kui lugeda alg- ja lõppolekud, samuti alghetke t_0 fikseerituks, kuid lubada muutisi lõpphetkel t, avaldub kujul

$$\delta S = -H\,\delta t. \tag{4.32}$$

Meile pakuvad huvi vaid sellised trajektoorid, mille korral kehtib energia jäävus, ehk saame $\delta S + E\,\delta t = 0$. Leiame

$$S = \int dS = \int p\,dq - H\,dt = \int p\,dq - E(t - t_0). \tag{4.33}$$

Liiget

$$S_0 = \int p\,dq \tag{4.34}$$

nimetatakse ka *lühendatud mõjuks*. Saame, et $\delta S_0 = 0$. Seega lühendatud mõjul on miinimum trajektoridel, mis rahuldavad energia jäävust ja läbivad lõpppunkti suvalisel ajahetkel — sellist variatsiooni printsiipi nimetatakse *Maupertuis printsiibiks*. Et seda rakendada, peame avaldama liikumishulga koordinaatide kaudu. Selleks lahendatakse võrrand $H(q, \dot{q}) = E$ suuruse dt suhtes ja asendatakse saadav q ka dq seos seosesse $p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q})$.

Selle arvutuse saab läbi teha kui Lagrange funktsioon on kujul

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}A(q)\dot{q} - U(q). \tag{4.35}$$

Liikumishulk on siis

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q} \tag{4.36}$$

ja energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{q}A(q)\dot{q} + U(q). \tag{4.37}$$

Viimasest saame leida

$$dt = \sqrt{\frac{dqA(q)dq}{2(E - U)}} \tag{4.38}$$

ja asendades selle avaldisse

$$p\,dq = \frac{dq}{dt}A(q)\,dq \tag{4.39}$$

saame lühendatud mõjuks

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)dqA(q)dq}. \tag{4.40}$$

Näiteks ühe masspunkti kineetiline energia on $T = \frac{1}{2}m(\frac{dl}{dt})^2$, kus dl on trajektori element. Rakendades Maupertuisi printsiipi, saame võrrandi

$$\delta \int \sqrt{2m(E-U)}\, dl = 0 \tag{4.41}$$

kus integraal on võetud antud kahe punkti vahel. Vabaliikumise korral $U = 0$ saame $\delta \int dl = 0$ ehk osake liigub piki trajektori, mis on lühim kahe punkti vahel, ehk pikki sirget.

Et täielikult määrata süsteemi liikumist, s.t. arvestades ka aja sõltuvust, siis tuleb lubada ka energia muutusi:

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E - (t-t_0)\delta E - E\delta t. \tag{4.42}$$

Asendades selle seosesse $deltaS + E\delta t = 0$, saame et

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{4.43}$$

Arvestades, et S_0 on antud ülaltoodud kujul, saame

$$\int \sqrt{\frac{dqA(q)dq}{2(E-U)}} = t - t_0, \tag{4.44}$$

mis on avaldise $dt = \ldots$ integraal.